TUGAS AKHIR - SM 141501

KONVERGENSI BARISAN DAN TEOREMA TITIK TETAP PADA RUANG b-METRIK

CAHYANINGRUM RAHMASARI
NRP 1211100009

Dosen Pembimbing
Sunarsini, S.Si, M.Si
Drs. Sadjidon, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

FINAL PROJECT - SM 141501

A CONVERGENCE OF SEQUENCES AND FIXED POINT THEOREMS ON b-METRIC SPACE

CAHYANINGRUM RAHMASARI
NRP 1211100009

Supervisors
Sunarsini, S.Si, M.Si
Drs. Sadjidon, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

LEMBAR PENGESAHAN

KONVERGENSI BARISAN DAN TEOREMA TITIK TETAP PADA RUANG *b*-METRIK

A CONVERGENCE OF SEQUENCES AND FIXED POINT THEOREMS ON b-METRIC SPACE

TUGAS AKHIR
Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada
Bidang Studi Analisis dan Aljabar
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh :
CAHYANINGRUM RAHMASARI
NRP. 1211 100 009

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II	Dosen Pembimbing I
Drs. Sadjidon, M.Si	**Sunarsini, S.Si, M.Si**
NIP. 19630909 198903 1 005	**NIP. 19691004 199402 2 001**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Imam Mukhlas, S.Si, M.T
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Juli 2016

KONVERGENSI BARISAN DAN TEOREMA TITIK TETAP PADA RUANG *b*-METRIK

Nama Mahasiswa : CAHYANINGRUM RAHMASARI
NRP : 1211 100 009
Jurusan : Matematika
Dosen Pembimbing : 1. Sunarsini, S.Si, M.Si
2. Drs. Sadjidon, M.Si

Abstrak

Salah satu fokus pembelajaran pada analisis fungsional diantaranya adalah ruang metrik. Dalam penelitian ini, dibahas mengenai ruang b-metrik yang merupakan generalisasi dari ruang metrik. Bahasan yang menarik untuk dikaji dalam ruang b-metrik diantaranya adalah mengenai konvergensi barisan serta teorema titik tetap. Untuk mendapatkan teorema titik tetap dalam ruang b-metrik, perlu ditunjukkan bahwa ruang b-metrik tersebut lengkap. Dalam tugas akhir ini, ditunjukkan bahwa ruang b-metrik, khususnya dalam ruang b-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$ *merupakan ruang b-metrik yang lengkap, sehingga didapatkan pula teorema titik tetap dalam ruang b-metrik* $\ell_{\frac{1}{2}}$.

***Kata Kunci* : Ruang Metrik, Ruang *b*-Metrik, Konvergensi Barisan, Teorema Titik Tetap.**

A CONVERGENCE OF SEQUENCES AND FIXED POINT THEOREMS ON B-METRIC SPACE

Name : CAHYANINGRUM RAHMASARI
NRP : 1211 100 009
Department : Mathematics
Supervisors : 1. Sunarsini, S.Si, M.Si
2. Drs. Sadjidon, M.Si

Abstract

Metric space is one of basic object in functional analysis. In this research, studied about b-metric space which is the generalization of metric space. Some interesting topics in b-metric space is about sequence convergence and fixed point theorems. To get the fixed point theorems must be showed that b-metric space is complete. In this final project, we investigate that the b-metric space, especially on $\ell_{\frac{1}{2}}$ b-metric space is complete, so it can get the fixed point theorems on $\ell_{\frac{1}{2}}$ b-metric space.

Keywords : Metric Space, b-Metric Space, Sequence Convergence, Fixed Point Theorems.

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$d(x, y)$	Metrik pada (x, y)
$d_b(x, y)$	b-metrik pada (x, y)
(X, d)	Ruang metrik pada X
(X, d_b)	Ruang b-metrik pada X
(x_n)	Barisan bilangan real
ℓ_p	Ruang barisan yang jumlahan absolut nilai-nilai barisannya pangkat p konvergen.
$\ell_{\frac{1}{2}}$	Ruang barisan yang jumlahan absolut nilai-nilai barisannya pangkat $\frac{1}{2}$ konvergen.
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real.
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli.
$\mathbb{R}^2$	Himpunan pasangan terurut bilangan real.
T	Pemetaan kontraktif
$\in$	Elemen atau anggota.
$\subseteq$	Himpunan bagian tak sejati.
$\lim_{n \to \infty}$	Limit n mendekati tak hingga.

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini akan diuraikan hal-hal yang melatarbelakangi tugas akhir ini yang selanjutnya dituliskan dalam sub perumusan masalah. Dalam bab ini juga dicantumkan mengenai batasan masalah, tujuan dan manfaat dari tugas akhir ini. Adapun sistematika penulisan tugas akhir diuraikan pada bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Dalam mempelajari ilmu pengetahuan tentu di dalamnya mempelajari matematika. Analisis fungsional merupakan salah satu cabang dari matematika analisis. Konsep umum yang dibahas dalam analisis fungsional diantaranya ruang metrik, ruang bernorma, ruang Banach, ruang hasil kali dalam, dan ruang Hilbert.

Seiring berkembangnya zaman, pembahasan dalam analisis fungsional pun mulai berkembang. Pada umumnya perkembangan dalam analisis fungsional tertuju pada perumuman ruang metrik serta pengembangan teorema titik tetap pada ruang-ruang tertentu.

Masalah konvergensi barisan merupakan salah satu bagian yang cukup menarik pada pembahasan di dalam analisis fungsional. Khususnya barisan di dalam ruang metrik dan ruang *b*-metrik.

Teorema titik tetap atau teorema pemetaan kontraktif merupakan hal yang penting dalam pembahasan mengenai ruang metrik. Teorema ini menunjukkan bahwa titik tetap dari pemetaan pada ruang metrik itu ada dan tunggal. Teorema ini pertama kali dibuktikan oleh Stefan Banach pada tahun 1920.

Selain itu, pengembangan teorema titik tetap pada ruang b-metrik ruang pun banyak diteliti. Teori mengenai titik tetap adalah salah satu topik penting dalam pengembangan analisis nonlinier.

Dengan menggunakan gagasan ini, pada tahun 1993 Czerwik [8] menampilkan suatu generalisasi dari teorema titik tetap Banach pada ruang b-metrik.

Konsep dari ruang b-metrik diperkenalkan dan dipelajari pada tahun 1989 oleh Bakhtin [9]. Bakhtin memperkenalkan ruang b-metrik sebagai generalisasi dari ruang metrik.

Oleh karena itu, dalam tugas akhir ini akan diselidiki mengenai konvergensi barisan dan kajian mengenai teorema titik tetap dalam ruang b-metrik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, dibuatlah suatu rumusan masalah yang akan dibahas dalam tugas akhir ini, yaitu bagaimanakah konvergensi barisan dan teorema titik tetap pada ruang b-metrik.

1.3 Batasan Masalah

Dalam pengerjaan Tugas Akhir ini diberikan suatu batasan masalah, yaitu ruang b-metrik yang diselidiki adalah dalam ruang $\ell_p, p = \frac{1}{2}$.

1.4 Tujuan

Tujuan dari Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Membuktikan bahwa ruang $\ell_{\frac{1}{2}}$ merupakan ruang b-metrik.
2. Menyelidiki konvergensi barisan pada ruang b-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$.
3. Menyelidiki teorema titik tetap pada ruang b-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$.

1.5 Manfaat

Melalui tugas akhir ini diharapkan dapat memberikan kontribusi yang berarti, sehingga dapat membuka pikiran dan wawasan serta menambah perbendaharaan pengetahuan mengenai konvergensi barisan, khususnya konvergensi barisan pada ruang b-metrik. Kemudian dapat dimanfaatkan sebagai langkah awal untuk mengkaji konvergensi barisan pada ruang b-metrik yang lainnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas Akhir ini secara keseluruhan terdiri dari lima bab dan lampiran. Secara garis besar masing-masing bab akan membahas hal-hal berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan tugas akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab II berisikan konsep-konsep dasar yang digunakan untuk menyelidiki konvergensi barisan pada ruang b-metrik yaitu ruang Metrik dan ruang b-metrik.

BAB III METODE PENELITAN

Dalam Bab ini akan dijelaskan mengenai tahapan-tahapan dalam pengerjaan tugas akhir. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi literatur, mengkaji barisan pada ruang b-metrik dan selanjutnya menyelidiki konvergensi dari barisan pada ruang b-metrik, penarikan kesimpulan, dan penulisan tugas akhir.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Dalam Bab ini akan dibahas mengenai ruang b-metrik, barisan pada ruang b-metrik serta konvergensi pada ruang b-metrik.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan yang dapat diambil dan saran-saran untuk pengembangan lebih lanjut dari Tugas Akhir.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai konsep atau teori dasar yang digunakan dalam menyelidiki konvergensi barisan pada ruang *b*-metrik. Konsep-konsep dasar tersebut diantaranya adalah mengenai ruang Metrik dan ruang *b*-Metrik.

2.1 Penelitian Terdahulu

Tinjauan pustaka yang digunakan dalam tugas akhir ini diantaranya adalah beberapa penelitian terdahulu yang berhubungan dengan topik tugas akhir. Salah satunya adalah penelitian yang dilakukan oleh Bakhtin [9]. Penelitian tersebut melatarbelakangi Czerwik [8] untuk mengembangkan ruang metrik.

Selain penelitian yang dilakukan oleh Bakhtin dan Czerwik, penelitian Mehmet Kir dan Kiziltunc dalam jurnal yang berjudul *On Some Well Known Fixed Point Theorems in b-Metric Spaces* [7] juga dijadikan tinjauan pustaka dalam tugas akhir ini.

Karena bahasan yang ada di setiap penelitian tersebut saling berhubungan, penelitian-penelitian tersebut dapat dijadikan sebagai tinjauan pustaka dan bahan acuan dalam penelitian tugas akhir ini mengenai konvergensi barisan dan teorema titik tetap pada ruang *b*-metrik.

2.2 *Ruang Metrik*

Sebelum membahas mengenai ruang b-metrik, terlebih dahulu perlu dijelaskan mengenai pengertian ruang metrik serta konvergensi dalam ruang metrik. Hal tersebut merupakan ide dasar dari konsep ruang *b*-metrik.

Definisi 2.2.1[3] *Misalkan X suatu himpunan tak kosong. Didefinisikan metrik atau fungsi jarak sebagai fungsi bernilai real $d: X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut.*
Untuk setiap $x, y, z \in X$, berlaku:

(M1) $d(x, y) \geq 0$.

(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$.

(M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Jika d metrik di X, maka pasangan (X, d) disebut ruang metrik.

Contoh 2.2.2[3] Pada himpunan $\mathbb{R}$ dapat didefinisikan metrik $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Mudah diperiksa bahwa sifat-sifat (M1)-(M3) berdasarkan definisi 2.2.1 terpenuhi.
Berikut akan dituliskan pembuktian (M4)

$$\begin{aligned}
\text{(M4)} d(x, z) &= |x - z| \\
&= |x - y + y - z| \\
&\leq |x - y| + |y - z| \\
d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z)
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Contoh 2.2.3[3] Untuk himpunan $\mathbb{C}$, dapat didefinisikan suatu fungsi $d: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dengan $d(v, w) = |v - w|$ untuk setiap $v, w \in \mathbb{C}$. Fungsi d merupakan metrik dan dikenal dengan *metrik Euclid* atau *metrik baku* pada $\mathbb{C}$.

Contoh 2.2.4[3] Untuk himpunan $\mathbb{R}^2$ dapat didefinisikan suatu fungsi $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dengan

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

untuk setiap $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ dan $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Dapat diperiksa dengan mudah bahwa sifat-sifat (M1)-(M3) berdasarkan defisini 2.2.1 dipenuhi.

Berikut akan dituliskan pembuktian (M4)

(M4) $d(x,y)+d(y,z)$

$$= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}+\sqrt{(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2}$$

$$\geq \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2}$$

$$= \sqrt{\begin{matrix}(x_1^2-2x_1y_1+y_1^2)+(x_2^2-2x_2y_2+y_2^2)+(y_1^2-2y_1z_1+z_1^2)+\\(y_2^2-2y_2z_2+z_2^2)\end{matrix}}$$

$$\geq \sqrt{(x_1^2-2x_1z_1+z_1^2)+(x_2^2-2x_2z_2+z_2^2)}$$

$$= \sqrt{(x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2}$$

Jadi, $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}+\sqrt{(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2} \geq \sqrt{(x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2}$

Jadi $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ $\blacksquare$

Berikutnya, akan diberikan definisi mengenai barisan konvergen dalam ruang metrik.

Definisi 2.2.5[3] *Suatu barisan* (x_n) *dari titik-titik dalam suatu ruang metrik* (X,d) *dikatakan konvergen ke* $x \in X$, *dinotasikan dengan* $x_n \to x$ *untuk* $n \to \infty$ *atau*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

jika barisan bilangan real tak-negatif $d(x_n,x) \to 0$ *saat* $n \to \infty$*; dengan kalimat lain, untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *terdapat* $N \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga* $d(x_n,x) < \varepsilon$ *untuk* $n \geq N$.

Lemma 2.2.6[5] *Sebuah barisan konvergen pada metrik* (X,d) *memiliki tepat satu limit.*

Bukti. Andaikan (x_n) kovergen di X dan memiliki dua limit x dan y yang berbeda maka $d(x,y) > 0$ jadi ada bilangan-bilangan bulat N_1 dan N_2 sehingga $d(x,x_n) < \frac{1}{2}d(x,y)$ untuk semua $n \geq N_1$ dan $d(y,x_n) < \frac{1}{2}d(x,y)$ untuk semua $n \geq N_2$. Andaikan $N = \max\{N_1, N_2\}$, maka

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,x_n) + d(x_n,y) \\ &< \frac{1}{2}d(x,y) + \frac{1}{2}d(x,y) \\ &= d(x,y) \end{aligned}$$

Hal ini terjadi kontradiksi. ◘

Dari Definisi 2.2.5 didapatkan bahwa suatu barisan (x_n) di X konvergen ke limit $x \in X$ jika dan hanya jika barisan bilangan real pada $d(x,x_n)$ konvergen ke nol. Dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ jika hanya jika $\lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0$.

Lemma 2.2.7[5] *Diberikan $X = (X,d)$ suatu ruang metrik. Jika $x_n \to x$ dan $y_n \to y$ pada X, maka $d(x_n,y_n) \to d(x,y)$.*

Bukti: Dari ketaksamaan segitiga

$$d(x_n,y_n) \leq d(x_n,x) + d(x,y) + d(y,y_n)$$

Sehingga didapatkan

$$d(x_n,y_n) - d(x,y) \leq d(x_n,x) + d(y_n,y)$$

Dan didapatkan

$$|d(x_n,y_n) - d(x,y)| \leq d(x_n,x) + d(y_n,y) \to 0$$

Dengan $n \to \infty$.

Sehingga $d(x_n,y_n) \to d(x,y)$ ◘

Berikutnya, diberikan definisi mengenai barisan Cauchy pada ruang metrik.

Definisi 2.2.8[3] *Misalkan* (X, d) *suatu ruang metrik. Suatu barisan* (x_n) *dari titik-titik di X merupakan barisan Cauchy jika untuk sebarang* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $N \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \text{ apabila } m, n \geq N$$

Contoh 2.2.9 Diberikan (X, d) suatu ruang metrik dengan $d(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$. Barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan barisan Cauchy pada (X, d). Sebab, untuk sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$, akan dicari bilangan asli N_ε, sehingga untuk sebarang bilangan asli $m, n \geq N_\varepsilon$ berlaku

$$d(x_m, x_n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

Ambil $N_\varepsilon < \frac{2}{\varepsilon}$. Jika $m, n > N_\varepsilon$ maka $\frac{1}{m} < \frac{1}{N_\varepsilon}$ dan $\frac{1}{n} < \frac{1}{N_\varepsilon}$. Sehingga diperoleh

$$d(x_m, x_n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{2}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

Lemma 2.2.10[5] *Setiap barisan konvergen di ruang metrik* (X, d) *adalah sebuah barisan Cauchy.*

Bukti: Andaikan (x_n) sebuah barisan di X dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, dan andaikan $\varepsilon > 0$. Maka ada sebuah bilangan bulat N sehingga $d(x, x_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$ untuk semua $n \geq N$, dan mengakibatkan, jika $n \geq N$ dan $m \geq N$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon$$

Jadi (x_n) adalah barisan Cauchy. ◻

Berikut akan diberikan definisi mengenai ruang metrik lengkap.

Definisi 2.2.11[3] *Misalkan* (X,d) *suatu ruang metrik dan* $E \subseteq X$. *Himpunan* E *dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di* E *mempunyai limit di* E. *Jika* X *lengkap maka dikatakan* (X,d) *ruang metrik lengkap.*

Contoh 2.2.12 Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan metrik $d(x,y) = |x - y|$ adalah suatu metrik lengkap. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut: misal (x_n) dengan $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ dan $n = 1,2,\ldots$ adalah barisan Cauchy pada $(\mathbb{R}, d)$ dan (x_n) konvergen ke $1 \in \mathbb{R}$ maka terbukti bahwa $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik lengkap.

Dari Contoh 2.2.12 terlihat bahwa himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ adalah contoh metrik lengkap.

2.3 Teorema Titik Tetap pada Ruang Metrik

Pada bagian ini akan diberikan suatu konsep mengenai teorema titik tetap pada ruang metrik yang akan menjadi dasaran pengerjaan teorema titik tetap pada ruang b-metrik pada bahasan berikutnya.

Definisi 2.3.1[5] *Diberikan* (X,d) *adalah ruang metrik. Pemetaan* $T: X \to X$ *disebut kontraktif pada* (X,d) *jika terdapat bilangan real* $0 < k < 1$ *untuk setiap* $x, y \in X$ *yang memenuhi*
$d(Tx, Ty) \leq kd(x,y)$.

Telah diketahui bahwa teorema pemetaan kontraksi Banach adalah satu hasil penting dari analisis fungsional.

Teorema 2.3.2[7] *Diberikan* (X,d) *suatu ruang metrik yang lengkap dan* T *suatu pemetaan pada* X *sehingga*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x,y)$$

Untuk setiap $x, y \in X$ *dimana* $k \in [0,1)$. *Maka* T *memiliki titik tetap tunggal yaitu* $x^* \in X$.

Selanjutnya, Kannan menetapkan suatu teorema sebagai berikut
Teorema 2.3.3[7] *Jika* $T: X \to X$ *dengan* (X, d) *suatu ruang metrik yang lengkap dan memenuhi ketaksamaan*

$$d(Tx, Ty) \leq a[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \quad (2.1)$$

Untuk setiap $x, y \in X$ *dimana* $a \in (0, 1/2]$ *maka* T *memiliki titik tetap yang tunggal.*

Pemetaan yang memenuhi (2.1) disebut pemetaan tipe Kannan.

Suatu kondisi kontraktif yang serupa diperkenalkan oleh Chatterjea sebagai berikut

Teorema 2.3.4[7] *Jika* $T: X \to X$ *dengan* (X, d) *suatu ruang metrik yang lengkap dan memenuhi ketaksamaan*

$$d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \quad (2.2)$$

Untuk setiap $x, y \in X$ *dimana* $b \in [0, 1/2)$ *maka* T *memiliki titik tetap yang tunggal.*

Pemetaan yang memenuhi (2.2) disebut pemetaan tipe Chatterjea.

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan metode yang digunakan dalam Tugas Akhir agar proses pengerjaan dapat terstruktur dengan baik dan dapat mencapai tujuan yang telah ditetapkan sebelumnya. Proses pengerjaan terdiri dari empat tahap, yaitu studi literatur, mengkaji ruang b-metrik, mengkaji barisan pada ruang b-metrik, menyelidiki konvergensi barisan pada ruang b-metrik.

1. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan yang akan dibahas. Dari permasalahan dan tujuan yang telah dirumuskan, selanjutnya dilakukan studi literatur untuk mendukung pengerjaan Tugas Akhir dan pemahaman yang lebih mendalam tentang metode yang akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam Tugas Akhir. Literatur yang dipelajari bersumber dari jurnal, penelitian sebelumnya, dan dari website-website di internet.

2. Mengkaji Barisan pada Ruang b-Metrik

Dalam tahan ini akan dilakukan pengkajian mengenai ruang b-metrik. Dan akan ditunjukkan bahwa ruang b-metrik $l_{\frac{1}{2}}$ adalah bukan merupakan suatu ruang metrik dengan syarat suatu nilai s yang telah didapatkan.

3. Mengkaji Ruang b-Metrik $l_{\frac{1}{2}}$

Dalam tahap ini akan dilakukan pengkajian mengenai ruang b-metrik $l_{\frac{1}{2}}$.

4. Penarikan Kesimpulan

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan dari hasil yang telah didapatkan pada tahap-tahap sebelumnya.

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai ruang b-metrik, konvergensi barisan pada ruang b-metrik, ruang b-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$, konvergensi barisan pada ruang b-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$, serta teorema titik tetap pada ruang b-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$.

4.1 Konvergensi Barisan pada Ruang *b*-Metrik

Setelah mendapatkan konsep mengenai ruang metrik, akan diperkenalkan mengenai konsep ruang b-metrik yang merupakan suatu perluasan dari ruang metrik.

Definisi 4.1.1[1] *Diberikan X adalah suatu himpunan tak kosong dan terdapat $s \geq 1$ bilangan real. Suatu fungsi $d_b: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut b-metrik, untuk setiap $x, y, z \in X$, berlaku:*

(BM1)$d_b(x, y) \geq 0$

(BM2)$d_b(x, y) = 0$, *jika dan hanya jika* $x = y$,

(BM3)$d_b(x, y) = d_b(y, x)$

(BM4)$d_b(x, z) \leq s[d_b(x, y) + d_b(y, z)]$

Pasangan (X, d_b) disebut ruang b-metrik.

Dari Definisi 4.1.1 jelas bahwa ruang b-metrik adalah suatu perluasan dari ruang metrik, sehingga diperoleh bahwa untuk setiap ruang metrik merupakan ruang b-metrik dengan $s = 1$ akan tetapi tidak berlaku sebaliknya.

Contoh 4.1.2 Diberikan $X = \mathbb{R}$ Didefinisikan $d_b: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $d_b(x, y) = |x - y|^p$, $p > 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$. $(\mathbb{R}, d_b)$ merupakan ruang b-metrik dengan $s = 2^p$. Berdasarkan Definisi 4.1.1 mudah diperiksa bahwa (BM1)-(BM3) terpenuhi.

Berikut akan dituliskan pembuktian untuk (BM4)
(BM4) Misal, $u = x - y, v = y - z, x - z = u + v$.

$$\begin{aligned} d_b(x,z) &= |x - z|^p \\ &= |u + v|^p \\ &\leq |2 \max\{u, v\}|^p \\ &\leq 2^p(|u|^p + |v|^p) \\ &= 2^p(|x - y|^p + |y - z|^p) \\ &= s[d_b(x,y) + d_b(y,z)] \end{aligned}$$

dengan $s = 2^p \geq 1$.
Karena memenuhi sifat-sifat pada Definisi 4.1.1, fungsi d_b dengan $d_b(x,y) = |x - y|^p$ adalah b-metrik di $\mathbb{R}$. ◻

Berikut ini akan diberikan definisi mengenai konsep konvergensi barisan pada ruang b-metrik.

Definisi 4.1.3[1] *Diberikan (X, d_b) ruang b-metrik. Barisan (x_n) pada X dikatakan konvergen jika dan hanya jika terdapat $x \in X$ dan $\forall \varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ didapatkan $d_b(x_n, x) < \varepsilon$. Dalam hal ini dapat ditulis $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.*

Contoh 4.1.4 Diberikan $(\mathbb{R}, d_b)$ ruang b-metrik dengan b-metrik $d_b(x,y) = |x - y|^p, p > 1,\ s = 2^p\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Barisan $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ merupakan barisan yang konvergen ke 0 di dalam ruang b-metrik $(\mathbb{R}, d_b)$. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut: dengan mengambil sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Jika $n \geq N$ didapat:

$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ sehingga $d_b(x_n, 0) = |\frac{1}{n} - 0|^p = \left(\frac{1}{n}\right)^p < \frac{1}{n} < \varepsilon$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Contoh 4.1.5 Diberikan $(\mathbb{R}, d_b)$ ruang b-metrik dengan b-metrik $d_b(x,y) = |x-y|^p, p > 1$, $s = 2^p$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Barisan $(x_n) = \frac{1}{1+na}$ dengan $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ adalah konvergen ke 0 di dalam ruang b-metrik $(\mathbb{R}, d_b)$. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut: dengan mengambil sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga $\frac{1}{N} < a\varepsilon$. Jika $n \geq N$ didapat $\frac{1}{1+na} \leq \frac{1}{na} \leq \frac{1}{Na} < a\varepsilon$, maka $d_b(x_n, x) = |\frac{1}{1+na} - 0|^p = \left(\frac{1}{1+na}\right)^p < \frac{1}{1+na} < \varepsilon$.
Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+na} = 0$.

Selanjutnya, akan diselidiki mengenai beberapa teorema yang berkaitan dengan konvergensi pada ruang b-metrik.

Berdasarkan Lemma 2.2.7 pada bagian 2, didapatkan teorema mengenai konvergensi barisan pada ruang b-metrik sebagai berikut.

Teorema 4.1.6 *Diberikan (X, d_b) ruang b-metrik. Jika (x_n), (y_n) barisan-barisan di dalam X yang masing-masing konvergen ke x dan y maka $\{d_b(x_n, y_n)\}$ konvergen ke $sd_b(x,y)$, untuk suatu $s \geq 1$.*

Bukti: Diambil (x_n) dan (y_n) sebarang barisan di ruang b-metrik (X, d_b). Misalkan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ dengan $x, y \in X$. Ini artinya $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N_1 N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\forall n \geq N_1$ berakibat $d_b(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2s}$ dan $\forall n \geq N_2$ berakibat $d_b(y, y_n) < \frac{\varepsilon}{2s}$. Dengan ketaksamaan segitiga, $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$ didapat

$$\begin{aligned} d_b(x_n, y_n) &\leq s[d_b(x_n, x) + d_b(x,y) + d_b(y, y_n)] \\ &< s\frac{\varepsilon}{2s} + sd_b(x,y) + s\frac{\varepsilon}{2s} \\ &= \varepsilon + sd_b(x,y) \end{aligned}$$

jadi

$$d_b(x_n, y_n) < \varepsilon + sd_b(x, y)$$
$$d_b(x_n, y_n) - sd_b(x, y) < \varepsilon$$

Akibatnya $|d_b(x_n, y_n) - sd_b(x, y)| < \varepsilon$, $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$ ini berarti barisan $\{d_b(x_n, y_n)\}$ konvergen ke $sd_b(x, y) \in X$. $\square$

Selanjutnya, berdasarkan Lemma 2.2.6 pada bagian 2, didapatkan teorema mengenai limit tunggal pada barisan konvergen di ruang b-metrik berikut ini.

Teorema 4.1.7 *Jika (x_n) barisan konvergen di ruang b-metrik (X, d_b) maka (x_n) memiliki limit tunggal.*

Bukti: Misal $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_1$. Akan dibuktikan $x = x_1$

Jika diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang maka terdapatlah bilangan asli N_1 dan N_2 sehingga untuk :

$n > N_1$ maka $d_b(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2s}$

$n > N_2$ maka $d_b(x_n, x_1) < \frac{\varepsilon}{2s}$

ambil $N = \max\{N_1, N_1\}$ maka untuk $n > N$ diperoleh

$$d_b(x, x_1) \leq s[d_b(x_n, x) + d_b(x_n, x_1)]$$
$$< s\left[\frac{\varepsilon}{2s} + \frac{\varepsilon}{2s}\right] = \varepsilon$$
$$d_b(x, x_1) < \varepsilon$$

Karena $0 \leq d_b(x, x_1) < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ maka diperoleh $d_b(x, x_1) = 0$

Sehingga $x = x_1$. $\square$

Selanjutnya berikut ini akan didefinisikan mengenai konsep barisan Cauchy pada ruang b-metrik yang masih berkaitan dengan kekonvergenan dalam ruang b-metrik.

Definisi 4.1.8[1] *Diberikan (X, d_b) merupakan ruang b-metrik. Barisan $\{x_n\}$ pada X disebut barisan Cauchy jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ didapatkan $d_b(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Definisi 4.1.9[1] *Ruang b-metrik (X, d_b) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchynya konvergen.*

Berikut akan ditunjukkan suatu teorema berdasarkan Definisi 4.1.8

Teorema 4.1.10 *Diberikan (X, d_b) ruang b-metrik. Jika (x_n) barisan konvergen di X maka (x_n) merupakan barisan Cauchy.*

Bukti: Ambil (x_n) sebarang barisan di ruang b-metrik (X, d_b). Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku $d_b(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2s}$ dan $d_b(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2s}$, untuk suatu $s \geq 1$. Karena (X, d_b) merupakan b-metrik, maka berlaku

$$\begin{aligned} d_b(x_n, x_m) &\leq s[d_b(x_n, x) + d_b(x, x_m)] \\ &< s\left[\frac{\varepsilon}{2s} + \frac{\varepsilon}{2s}\right] \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

jadi $d_b(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\blacksquare$

Terbukti bahwa barisan yang konvergen pada $d_b(x, y)$ merupakan barisan Cauchy.

4.2 Ruang b-Metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$

Selanjutnya setelah mengetahui konsep-konsep mengenai ruang b-metrik dan konvergensinya, pada bagian ini akan diselidiki mengenai ruang ℓ_p $(0 < p < 1)$ khususnya $p = \frac{1}{2}$.

Definisi 4.2.1[1] *Diberikan himpunan* ℓ_p $(0 < p < 1)$

$$\ell_p = \left\{ x = (x_n); x_n \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

Berikut ini akan diberikan teorema mengenai ruang b-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$.

Teorema 4.2.1 *Diberikan himpunan* $\ell_{\frac{1}{2}}$. *Jika* $d_b \colon \ell_{\frac{1}{2}} \times \ell_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}$ *dengan* $d_b(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2$ *maka* d_b *merupakan b-metrik. Lebih lanjut,* $\left(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b\right)$ *merupakan ruang b-metrik.*

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa $d_b(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2$ merupakan b-metrik.
Ditunjukkan bahwa d_b memenuhi Definisi 4.1.1

(BM1) $d_b(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$(\Longrightarrow)$

$$d_b(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 0$$
$$\left(|x_1 - y_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2 - y_2|^{\frac{1}{2}} + |x_3 - y_3|^{\frac{1}{2}} + \cdots\right)^2 = 0$$

Dengan mengakarkan kedua ruas,

$$\left(|x_1 - y_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2 - y_2|^{\frac{1}{2}} + |x_3 - y_3|^{\frac{1}{2}} + \cdots\right) = 0$$
$$|x_n - y_n|^{\frac{1}{2}} = 0, \qquad n = 1,2,\ldots$$
$$|x_n - y_n| = 0, \qquad n = 1,2,\ldots$$
$$x_n = y_n, \qquad n = 1,2,\ldots$$
$$x = y$$

sehingga didapatkan $d_b(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ (4.1)

$(\Longleftarrow)$

$$d_b(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$
$$= \left(|x_1 - y_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2 - y_2|^{\frac{1}{2}} + |x_3 - y_3|^{\frac{1}{2}} + \cdots\right)^2$$

Karena $x = y$ maka,

$$= \left(|y_1 - y_1|^{\frac{1}{2}} + |y_2 - y_2|^{\frac{1}{2}} + |y_3 - y_3|^{\frac{1}{2}} + \cdots\right)^2$$
$$= (0 + 0 + 0 + \cdots)^2$$
$$= 0$$
$$d_b(x,y) = 0$$

sehingga didapatkan $x = y \Rightarrow d_b(x,y) = 0$ (4.2)

Dari persamaan (4.1) dan (4.2) dapat disimpulkan bahwa $d_b(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(BM2)

$$d_b(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$
$$= \left(|x_1 - y_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2 - y_2|^{\frac{1}{2}} + |x_3 - y_3|^{\frac{1}{2}} + \cdots\right)^2$$

Berdasarkan sifat nilai mutlak,

$$= \left(|y_1 - x_1|^{\frac{1}{2}} + |y_2 - x_2|^{\frac{1}{2}} + |y_3 - x_3|^{\frac{1}{2}} + \cdots\right)^2$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$
$$= d_b(y,x)$$

sehingga, $d_b(x,y) = d_b(y,x)$ yang memenuhi (BM2).

(BM3)

$d_b(x,z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2$

$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2$

Dengan mengakarkan kedua ruas, didapatkan

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right) \ldots \quad (4.3)$$

Dari persamaan (4.3) dapat dibuat dua persamaan baru yaitu

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right) \quad (4.4)$$

Dan

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right) \quad (4.5)$$

Dari persamaan (4.4) dan (4.5) jika dijumlahkan akan didapatkan

$$2\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right)$$

Dengan mengumpulkan $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right)$ dan $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right)$ pada ruas yang sama, didapatkan

$$2\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right)$$

$2\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right) - 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right) \leq 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right)$

Lalu memindahkan $\left(-2\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right)\right)$ pada ruas sisi lainnya

$2\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right) \leq 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right) + 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right)$

$2\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right) \leq 2\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right)\right]$

Didapatkan,

$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leq 2^2\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n - z_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]$

$d_b(x,z) \leq 2^2[d_b(x,y) + d_b(y,z)]$ ◘

Karena memenuhi Definisi 4.1.1, maka terbukti bahwa $d_b(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2$ merupakan b-metrik dengan $s = 2^2$ dan pasangan $\left(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b\right)$ merupakan ruang b-metrik.

Selanjutnya akan diberikan mengenai konvergensi barisan Cauchy pada ruang b-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$ dan sifat lengkap dari ruang b-metrik $\left(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b\right)$.

Berdasarkan Teorema 4.1.10 berikut akan ditunjukkan mengenai barisan konvergen Cauchy pada ruang b-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$.

Teorema 4.2.2 *Diberikan* $\left(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b\right)$ *ruang b-metrik. Jika* (x_n) *barisan konvergen di* $\left(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b\right)$, *maka* (x_n) *merupakan barisan Cauchy.*

Bukti: diambil (x_n) sebarang barisan di ruang b-metrik $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku $d_b(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{8}$ dan $d_b(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{8}$

$d_b(x_n, x)$ artinya

$$d_b(x_n, x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x|^{\frac{1}{2}}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{8}$$

$d_b(x_m, x)$ artinya

$$d_b(x_m, x) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m - x|^{\frac{1}{2}}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{8}$$

Karena d_b b-metrik, maka berlaku

$$\begin{aligned} d_b(x_n, x_m) &\leq 4[d_b(x_n, x) + d_b(x_m, x)] \\ &= 4\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m - x|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right] \\ &< 4\left[\frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8}\right] \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

jadi

$d_b(x_n, x_m) < \varepsilon$ ◻

Dari Definisi 4.1.8 diperoleh bahwa barisan konvergen pada $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$ merupakan barisan Cauchy.

Setelah pada dua teorema sebelumnya telah ditunjukkan bahwa $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$ adalah suatu ruang b-metrik dan suatu barisan konvergen pada $d_b(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2$ merupakan barisan Cauchy. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa ruang b-metrik $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$ merupakan ruang b-metrik yang lengkap.

Berdasarkan pada Definisi 4.1.9 berikut akan ditunjukkan suatu teorema mengenai ruang b-metrik lengkap.

Teorema 4.2.7 *Ruang $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$ merupakan ruang b-metrik yang lengkap.*

Bukti.
Ambil sebarang barisan Cauchy (x_n) di $\ell_{\frac{1}{2}}$ dengan $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots)$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat N sehingga untuk $m, n \geq N$, berlaku

$$d_b(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_{mj} - x_{nj}\right|^{\frac{1}{2}}\right)^2 < \varepsilon \qquad (4.6)$$

Ini memenuhi untuk setiap $j = 1,2, \ldots$ sehingga didapatkan

$$\left|x_{mj} - x_{nj}\right| < \varepsilon \qquad (4.7)$$

Ambil j tetap. Dari (4.7) terlihat bahwa (x_{nj}) adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Berdasarkan Contoh 2.2.12, telah ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}$ merupakan suatu ruang metrik lengkap, sehingga untuk setiap barisan Cauchynya konvergen, katakan konvergen ke $x_j \in \mathbb{R}$ sehingga $x_{nj} \to x_j$ saat $n \to \infty$. Dengan menggunakan limit ini, didefinisikan $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ dan akan ditunjukkan bahwa $x \in \ell_{\frac{1}{2}}$ dan $x_n \to x$.
Dari (4.6) didapatkan untuk setiap $m, n \geq N$ dan $k \geq 1$, diperoleh

$$\sum_{j=1}^{k} \left|x_{mj} - x_{nj}\right|^{\frac{1}{2}} < \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

jika $m \to \infty$ dan $k \to \infty$, untuk $n \geq N$. didapatkan

$$\textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j - x_{nj}\right|^{\frac{1}{2}} < \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tag{4.8}$$

Ini menunjukkan bahwa $x - x_n = (x_j - x_{nj}) \in \ell_{\frac{1}{2}}$. Karena $x_n \in \ell_{\frac{1}{2}}$, maka berdasarkan ketaksamaan Minkowski

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_{nj} + (x_j - x_{nj})\right|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_{nj}\right|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j - x_{nj}\right|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

karena $x_n \in \ell_{\frac{1}{2}}$ dan $x - x_n \in \ell_{\frac{1}{2}}$, maka $x = x_n + x - x_n \in \ell_{\frac{1}{2}}$. Pada persamaan (4.8) merepresentasikan $[d_b(x, x_n)]^p$, sehingga persamaan tersebut menunjukkan bahwa $x_n \to x$, dan karena (x_n) merupakan sebarang barisan Cauchy di $\ell_{\frac{1}{2}}$, maka hal ini menunjukkan kelengkapan dari $\ell_{\frac{1}{2}}$. ◘

4.3 Teorema Titik Tetap pada Ruang *b*-Metrik $\boldsymbol{\ell_{\frac{1}{2}}}$

Pada bagian ini, akan diberikan beberapa teorema titik tetap dari ruang *b*-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$. Secara umum, teorema titik tetap pada ruang *b*-metrik telah diuraikan pada [7].

Teorema pertama mengenai prinsip kontraktif Banach pada ruang *b*-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$.

Teorema 4.3.1 *Diberikan* $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$ *ruang b-metrik yang lengkap dengan konstanta* $s = 2^2 = 4$ *dan* $T: \ell_{\frac{1}{2}} \to \ell_{\frac{1}{2}}$ *suatu pemetaan* *kontraktif dengan batasan* $k \in [0,1/4)$ *dan* $ks < 1$. *Jika barisan* $(x_n) \in \ell_{\frac{1}{2}}$ *dengan* $x_n = T\, x_{n-1} = T^n x_0, n = 1,2, \dots$. *berlaku*

$$d_b(Tx, Ty) \leq k d_b(x, y)$$

maka terdapat $x^* \in \ell_{\frac{1}{2}}$ *sedemikian hingga* $x_n \to x^*$ *dan* x^* *adalah titik tetap tunggal* T.

Bukti:

Ambil sebarang $x_0 \in \ell_{\frac{1}{2}}$ dan (x_n) suatu barisan pada $\ell_{\frac{1}{2}}$ dengan

$$x_n = T\, x_{n-1} = T^n x_0, n = 1,2, \dots$$

Karena T adalah suatu pemetaan kontraktif dengan konstanta $k \in [0,1/4)$ maka didapatkan

$$\begin{aligned} d_b(T^2 x_0, T^2 x_1) &\leq k d_b(T x_0, T x_1) \\ &\leq k^2 d_b(x_0, x_1) \\ &\leq k^2 \left(\sum |x_0 - x_1|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

$$d_b(T^2 x_0, T^2 x_1) \leq k^n \left(\sum |x_0 - x_1|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy pada $\ell_{\frac{1}{2}}$.

Diberikan $m, n > 0$ dan $m > n$,

$$\begin{aligned} d_b(x_n, x_m) &< 4\left(\sum |x_n - x_{n+1}|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 4^2\left(\sum |x_{n+1} - x_{n+2}|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &\quad +4^3\left(\sum |x_{n+2} - x_{n+3}|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \cdots \\ &< 4k^n\left(\sum |x_0 - x_1|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 4^2 k^{n+1}\left(\sum |x_0 - x_1|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &\quad +4^3 k^{n+2}\left(\sum |x_0 - x_1|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \cdots \end{aligned}$$

$$= 4k^n \left(\sum |x_0 - x_1|^{\frac{1}{2}}\right)^2 [1 + 4k + (4k)^2 + (4k)^3 + \cdots] \tag{4.9}$$

Kemudian ambil $n, m \to \infty$ pada (4.9), didapatkan

$$\lim_{m,n\to\infty} d_b(x_n, x_m) = \lim_{m,n\to\infty} \left(\sum |x_m - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 0$$

Sehingga, (x_n) adalah barisan Cauchy pada $\ell_{\frac{1}{2}}$. Dan berdasarkan kelengkapan dari $\ell_{\frac{1}{2}}$ maka (x_n) konvergen ke $x^* \in \ell_{\frac{1}{2}}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa x^* adalah titik tetap tunggal dari T.
Tentu saja

$$Tx^* = \lim_{n\to\infty} T\,x_n = \lim_{n\to\infty} T\,x_{n+1} = x^*$$

Oleh karena itu, x^* adalah titik tetap dari T. Perlu ditunjukkan bahwa titik tetapnya tunggal.

Anggap x' adalah titik tetap yang lain dari T, maka $Tx' = x'$.

$$d_b(x^*, x') = d_b(Tx^*, Tx') \leq k \left(\sum |x^* - x'|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \tag{4.10}$$

Persamaan (4.10) menunjukkan bahwa $k \geq 1$ namun dalam hal ini kontradiksi dengan $k \in [0,1/4)$. Sehingga titik tetapnya adalah tunggal. ◻

Berikutnya akan diberikan teorema mengenai teorema titik tetap tipe Kannan pada ruang b-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$.

Teorema 4.3.2 *Diberikan* $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$ *ruang b-metrik yang lengkap dengan konstanta* $s = 2^2 = 4$ *dan* $T: \ell_{\frac{1}{2}} \to \ell_{\frac{1}{2}}$ *suatu pemetaan untuk setiap* $\mu \in [0, 1/2)$. *Jika barisan* $(x_n) \in X$ *dengan* $x_n = T\,x_{n-1} = T^n x_0$, $n = 1,2, \ldots$. *sedemikian hingga untuk setiap* $x, y \in \ell_{\frac{1}{2}}$ *berlaku*

$$d_b(Tx,Ty) \le \mu[d_b(x,Tx) + d_b(y,Ty)] \tag{4.11}$$

maka terdapat $x^* \in \ell_{\frac{1}{2}}$ *sedemikian hingga* $x_n \to x^*$ *dan* x^* *adalah titik tetap tunggal* T.

Bukti:

Ambil sebarang $x_0 \in \ell_{\frac{1}{2}}$ dan (x_n) suatu barisan pada $\ell_{\frac{1}{2}}$ dengan

$$x_n = T\,x_{n-1} = T^n x_0, n = 1,2,\dots$$

Dengan menggunakan ketaksamaan (4.11) didapatkan

$$\begin{aligned} d_b(x_n,x_{n+1}) &= d_b(Tx_{n-1},Tx_n) \\ &\le \mu[d_b(x_{n-1},x_n) + d_b(x_n,x_{n+1})] \\ &= \mu\left[\left(\sum |x_{n-1} - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum |x_n - x_{n+1}|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right] \\ &\le \frac{\mu}{\mu-1}\left(\sum |x_{n-1} - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

jadi $d_b(x_n,x_{n+1}) \le \frac{\mu}{\mu-1} d_b(x_{n-1},x_n)$

dan didapatkan

$$d_b(x_n,x_{n+1}) \le \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^n \left(\sum |x_0 - x_1|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Karena $\mu \in [0, 1/2)$ maka $\frac{\mu}{\mu-1} \in [0,1)$. Sehingga, T merupakan suatu pemetaan kontraktif.

Dari Teorema 4.3.1 telah ditunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy pada $\ell_{\frac{1}{2}}$ dan merupakan barisan konvergen. Anggap bahwa (x_n) konvergen ke $x^* \in \ell_{\frac{1}{2}}$ sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} d_b(x^*,Tx^*) &\le 4[d_b(x^*,x_n) + d_b(x_n,Tx^*)] \\ &= 4\left[\left(\sum |x^* - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum |x_n - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right] \end{aligned}$$

$$\leq 4\left(\sum |x^* - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 4\mu[\left(\sum |x_{n-1} - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum |x_n - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2]$$

Dan didapatkan

$$d_b(x^*, Tx^*) \leq \frac{4}{1-4\mu}\left(\sum |x^* - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{4\mu}{1-4\mu}\left(\sum |x_n - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \tag{4.12}$$

Dari (4.12), didapatkan

$$d_b(x^*, Tx^*) \leq \frac{4}{1-4\mu}\left(\sum |x^* - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{4\mu}{1-4\mu}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^n \left(\sum |x_n - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \tag{4.13}$$

Diberikan $n \to \infty$ pada (4.13) sehingga

$$\lim_{n\to\infty} d_b(x^*, Tx^*) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum |x^* - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 0$$

Oleh karena itu, $x^* = Tx^*$ dan menunjukkan bahwa x^* adalah titik tetap tunggal dari T. ◘

Berikutnya akan diberikan teorema mengenai teorema titik tetap tipe Chatterjea pada ruang b-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$.

Teorema 4.3.3 *Diberikan* $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$ *ruang b-metrik yang lengkap dengan konstanta* $s = 2^2 = 4$ *dan* $T: \ell_{\frac{1}{2}} \to \ell_{\frac{1}{2}}$ *suatu pemetaan untuk setiap* $\lambda \in [0, 1/8)$ *dan* $s\lambda < \frac{1}{8}$. *Jika barisan* $(x_n) \in \ell_{\frac{1}{2}}$ *dengan* $x_n = T\,x_{n-1} = T^n x_0$, $n = 1,2, \dots$. *sedemikian hingga untuk setiap* $x, y \in \ell_{\frac{1}{2}}$ *berlaku*

$$d_b(Tx,Ty) \leq \lambda[d_b(x,Ty) + d_b(y,Tx)] \qquad (4.14)$$

maka terdapat $x^* \in \ell_{\frac{1}{2}}$ *sedemikian hingga* $x_n \to x^*$ *dan* x^* *adalah titik tetap tunggal* T.

Bukti:

Ambil sebarang $x_0 \in \ell_{\frac{1}{2}}$ dan (x_n) suatu barisan pada $\ell_{\frac{1}{2}}$ dengan

$$x_n = T\,x_{n-1} = \; T^n x_0, n = 1,2, \ldots$$

Dengan menggunakan ketaksamaan (4.14) didapatkan

$$d_b(x_n,x_{n+1}) = d_b(Tx_{n-1},Tx_n) = \left(\sum |Tx_{n-1} - Tx_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$\leq \lambda\left[\left(\sum |x_{n-1} - Tx_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum |x_n - Tx_{n-1}|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]$$

$$= \lambda\left[\left(\sum |x_{n-1} - x_{n+1}|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum |x_n - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]$$

$$\leq 4\lambda\left[\left(\sum |x_{n-1} - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum |x_n - x_{n+1}|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]$$

Dan didapatkan

$$d_b(x_n,x_{n+1}) \leq \frac{4\lambda}{1-4\lambda}\left(\sum |x_{n-1} - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Karena $\lambda \in [0, 1/8)$ maka $\frac{4\lambda}{1-4\lambda} \in [0,1)$. Sehingga, T merupakan suatu pemetaan kontraktif.

Dari Teorema 4.3.1 dan Teorema 4.3.2 telah ditunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy pada $\ell_{\frac{1}{2}}$ dan merupakan barisan konvergen ke $x^* \in \ell_{\frac{1}{2}}$.

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa x^* adalah titik tetap dari T.

$$d_b(x^*,Tx^*) \leq 4\left[\left(\sum |x^* - x_{n+1}|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum |x_{n+1} - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]$$

$$= 4\left(\sum|x^* - x_{n+1}|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 4\left(\sum|Tx_n - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$
$$\leq 4\left(\sum|x^* - x_{n+1}|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 4\lambda\left[\left(\sum|x^* - Tx_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\sum|x_n - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]$$

Sehingga didapatkan

$$d_b(x^*, Tx^*) \leq 4d_b(x^*, x_{n+1}) + 4\lambda d_b(x^*, x_{n+1})$$
$$+4\lambda d_b(x_n, Tx^*)] \qquad (4.15)$$

Diberikan $n \to \infty$ pada (4.15) sehingga

$$d_b(x^*, Tx^*) \leq 4\lambda\left(\sum|x^* - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \qquad (4.16)$$

Ketaksamaan (4.16) salah, kecuali $d_b(x^*, Tx^*) = 0$, sehingga didapatkan $x^* = Tx^*$. ◻

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini membahas mengenai kesimpulan dari penulisan Tugas Akhir dan saran yang bisa digunakan untuk pengembangan penelitian selanjutnya dengan topik yang sama.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan dari seluruh proses pada bab-bab sebelumnya, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Jika barisan-barisan (x_n), (y_n) di dalam X dengan (X, d_b) ruang b-metrik yang masing-masing konvergen ke x dan y, maka $\left(d_b(x_n, y_n)\right)$ konvergen ke $sd_b(x, y)$.
2. Jika (x_n) barisan konvergen di ruang b-metrik (X, d_b) maka (x_n) memiliki limit tunggal
3. Ruang $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$ merupakan ruang b-metrik yang lengkap.
4. Berdasarkan Teorema titik tetap Banach, diberikan $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$ ruang b-metrik yang lengkap dengan konstanta $s = 2^2 = 4$ dan $T: \ell_{\frac{1}{2}} \to \ell_{\frac{1}{2}}$ suatu pemetaan kontraktif dengan batasan $k \in [0,1/4)$ dan $ks < 1$. Jika barisan $(x_n) \in \ell_{\frac{1}{2}}$ dengan $x_n = T\,x_{n-1} = T^n x_0$, $n = 1,2, \ldots$ maka, terdapat $x^* \in \ell_{\frac{1}{2}}$ sedemikian hingga $x_n \to x^*$ dan x^* adalah titik tetap tunggal T.
5. Berdasarkan Teorema titik tetap tipe Kannan, diberikan $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$ ruang b-metrik yang lengkap dengan konstanta $s = 2^2 = 4$ dan $T: \ell_{\frac{1}{2}} \to \ell_{\frac{1}{2}}$ suatu pemetaan untuk setiap $\mu \in [0, 1/2)$. Jika barisan $(x_n) \in \ell_{\frac{1}{2}}$ dengan $x_n = T\,x_{n-1} = T^n x_0$, $n = 1,2, \ldots$. sedemikian hingga untuk setiap $x, y \in \ell_{\frac{1}{2}}$ berlaku
$$d_b(Tx, Ty) \leq \mu[d_b(x, Tx) + d_b(y, Ty)]$$

maka, terdapat $x^* \in \ell_{\frac{1}{2}}$ sedemikian hingga $x_n \to x^*$ dan x^* adalah titik tetap tunggal T.

6. Berdasarkan Teorema titik tetap tipe Chatterjea, diberikan $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$ ruang b-metrik yang lengkap dengan konstanta $s = 2^2 = 4$ dan $T: \ell_{\frac{1}{2}} \to \ell_{\frac{1}{2}}$ suatu pemetaan untuk setiap $\lambda \in [0, 1/8)$ dan $\lambda s < \frac{1}{2}$. Jika barisan $(x_n) \in \ell_{\frac{1}{2}}$ dengan $x_n = T\,x_{n-1} = T^n x_0$, $n = 1,2, \dots$. sedemikian hingga untuk setiap $x, y \in \ell_{\frac{1}{2}}$ berlaku

$$d_b(Tx, Ty) \leq \lambda[d_b(x, Ty) + d_b(y, Tx)]$$

maka, terdapat $x^* \in \ell_{\frac{1}{2}}$ sedemikian hingga $x_n \to x^*$ dan x^* adalah titik tetap tunggal T.

5.2 Saran

Untuk pengembangan penelitian selanjutnya, dapat dikaji mengenai konvergensi pada ruang b-metrik yang lain dan mengenai teorema titik tetapnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Dubey, A.K., Shukla, R., Dubey, R.P., 2014. “Some Fixed Point Results in *b*-Metric Spaces”. **Asian Journal of Mathematics and Applications** 2014. 0147.

[2] Alghamdi, M.A, Hussain, N., Salimi, P., 2013. “Fixed Point and Coupled Fixed Point Theorems on *b*-Metric-like Space”. **Journal of Inequalities and Application** 1. 402.

[3] Yunus, M. 2005. **Modul Ajar Pengantar Analisis Fungsional**. Surabaya: Jurusan Matematika ITS.

[4] Bartle, R.G. Sherbet, D.R. 2010. **Introduction to Real Analysis (Fourth Edition)**. John Wiley and Sons, Inc., United States of America.

[5] Kreyszig, E. 1978. **Introductory Fungsional Analysis with Applications.** New York: John Wiley & Sons. Inc.

[6] Amini Harandi, A. 2012. “Metric-like Spaces, Partial Metric Space and Fixed Points” **Fixed Point Theory Application** 1. 204.

[7] Kir, M., Kiziltunc, H. 2013. “On Some Well Known Fixed Point Theorems in *b*-Metric Spaces”. **Turkish Journal of Analysis and Number Theory** 1. 13-16.

[8] Czerwik, S. 1993. “Contaction Mappings in *b*-metric spaces”. **Acta Math**. Inform. Univ. Ostrav. 1, 5-11.

[9] Bakhtin, IA. 1989. “The Contraction Mapping Principle in Quasimetric spaces”. **Functional Analysis, vol 30**. 26-37.

BIODATA PENULIS

Penulis memiliki nama Cahyaningrum Rahmasari atau biasa dipanggil Sari, lahir di Surabaya pada tanggal 16 Maret 1993. Penulis merupakan anak kedua dari dua bersaudara.

Penulis telah menempuh pendidikan formal di SD Negeri Larangan Sidoarjo (2000-2005), SMP Negeri 1 Sidoarjo (2005-2008), SMA Negeri 1 Sidoarjo (2008-2011), kemudian, penulis melanjutkan pendidikan S1 di Jurusan Matematika FMIPA ITS melalui jalur SNMPTN undangan pada tahun 2011 dan terdaftar sebagai mahasiswa ITS dengan NRP 1211 100 009. Di Jurusan Matematika, penulis mengambil bidang minat Analisis dan Aljabar.

Penulis aktif di beberapa organisasi sosial seperti diantaranya adalah Save Street Child Surabaya yaitu suatu komunitas pemerhati anak-anak jalanan di wilayah kota Surabaya, juga Street Children Foundation yaitu komunitas pemerhati anak-anak jalanan di wilayah Sidoarjo.

Penulis juga sering mengikuti beberapa seminar, antara lain seminar Bioteknologi, Entrepeneurship, dan seminar lainnya.

Apabila ingin memberikan saran, kritik dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini, dapat disampaikan melalui *e-mail* rahmasari.cr@gmail.com.